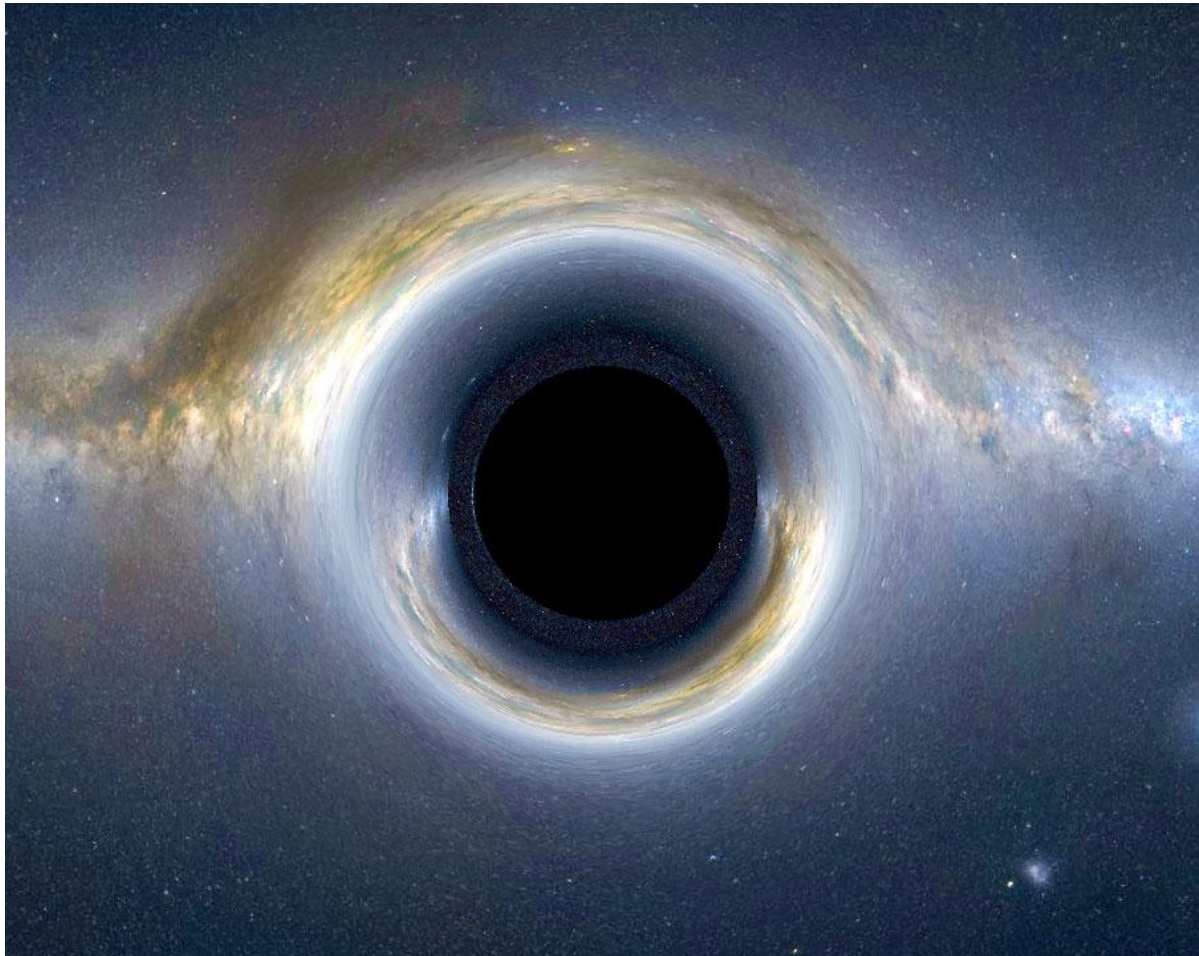


Arbeitsmaterial für die gymnasiale Oberstufe zum Thema:

# Schwarze Löcher



Kapitel	Titel	Seite
1	Grundlagen	2
1.1	Wie schnell muss man sein um von einem Planeten wegzufiegen?	2
1.2	Wenn selbst das Licht nicht mehr fliehen kann – Der Ereignishorizont	3
1.3	Wie groß und wie schwer sind Schwarze Löcher?	5
1.4	Die Entstehung eines Schwarzen Lochs	6
1.5	Wachsen Schwarze Löcher? - Die Hawking-Strahlung	8
1.6	Gibt es sie denn wirklich?	9
2	Auswirkungen	12
2.1	Die Krümmung des Raums	12
2.2	Die Ablenkung des Lichts – Der Gravitationslinseneffekt	15
2.3	Zeit ist relativ, besonders bei großen Massen	17
2.4	Der hypothetische Fall in ein Schwarzes Loch	20
3	Zusammenfassung wichtiger Sätze und Formeln	21

## Vorwort

Mit diesem Arbeitsmaterial sollen euch die sagenumwobenen Schwarzen Löcher näher gebracht werden. In den Medien oftmals als mysteriöse und zerstörerische „Materiefresser“ betitelt, wollen wir hier klären, was ein Schwarzes Loch aus physikalischer Sicht denn wirklich ist. Warum ist es schwarz? Warum heißt es Loch? Wie entstehen Schwarze Löcher? Kann ihre Existenz überhaupt nachgewiesen werden? Müssen wir Angst haben, dass wir irgendwann von einem Schwarzen Loch „verschlungen“ werden? Das sind die allgemeinen Leitfragen, die mit dieser Arbeitseinheit beantwortet werden sollen.

Zunächst soll hier angemerkt sein, dass alle folgenden Erläuterungen zwar dem derzeitigen Stand der Astrophysik (nach dem griechischen Wort "Astro" für Stern) entsprechen, jedoch gegenwärtig Schwarze Löcher nicht vollkommen erforscht sind. Daher können hier vielleicht nicht alle interessanten Fragen bezüglich Schwarzer Löcher zweifelsfrei geklärt werden, die euch jetzt durch den Kopf gehen. Viele aktuelle Forschungen beschäftigen sich mit diesem Thema, so dass ihr die Möglichkeit habt mit ergänzenden Recherchen zu diesen Erklärungen einen aktuellen Einblick in wissenschaftliche Forschung zu bekommen. Hier kannst du vielleicht sogar etwas lernen, was selbst deine Lehrer noch nicht wissen.

Die Geschichte von Schwarzen Löchern in der Forschung ist noch gar nicht so alt. Zwar spekulierte bereits 1783 der britische Forscher John Michell das sogenannte „dunkle Sterne“ existieren könnten, deren Gravitation ausreicht um Licht gefangen zu halten, in der Wissenschaft wurden sie tatsächlich aber erst später akzeptiert. Die Spekulationen Michells basierten ausschließlich auf den aus der Mechanik bekannten Gravitationsgesetzen von Newton. Im Jahre 1916 bestimmte der deutsche Astronom Karl Schwarzschild mithilfe Albert Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie erstmals theoretisch die Größe und das Verhalten eines Schwarzen Lochs und führte somit unter anderem die Begriffe Ereignishorizont und den nach ihm benannten Schwarzschildradius ein.

In den darauf folgenden Jahren wurden Schwarze Löcher immer präsenter in wissenschaftlichen Forschungen, so dass in den späten 1920er und 1930er Jahren viele Überlegungen zur Entstehung von Schwarzen Löchern veröffentlicht wurden. Robert Oppenheimer, Robert Serber und George Michael Volkoff konnten schließlich im Jahre 1939 mithilfe von Modellrechnungen nachweisen, dass nach einem Gravitationskollaps eines sehr großen Sterns ein Schwarzes Loch entstehen kann. Der Begriff "Schwarzes Loch" wurde dann aber erst im Jahr 1967 von John Archibald Wheeler eingeführt.

Bis hierhin waren die Überlegungen zu Schwarzen Löchern ausschließlich theoretischer Natur. Erst im Jahre 1971 folgte die erste experimentelle Entdeckung eines möglichen Schwarzen Lochs im Bereich der Astronomie.

Das klingt für euch noch alles ziemlich kompliziert und einige der genannten Begriffe sind euch völlig fremd? Kein Problem, all diese Zusammenhänge werden wir nun auf den folgenden Seiten aufbereiten und vertiefen. Zudem sind zu den meisten Kapiteln Aufgaben gestellt, die zum einen euer neues Wissen überprüfen sollen und zum anderen auch weitere Erkenntnisse zu Schwarzen Löchern liefern.

## 1 Grundlagen

In diesem ersten Kapitel werden wir uns mit grundlegenden Eigenschaften von Schwarzen Löchern auseinander setzen. Diese Eigenschaften bauen in erster Linie auf Überlegungen auf, denen Zusammenhänge der Mechanik zugrunde liegen. Die in diesem Kapitel vorausgesetzten Inhalte sind euch also bereits aus dem Physikunterricht bekannt. Die wichtigsten Zusammenhänge werden aber auch zur Erinnerung in den jeweiligen Kapiteln nochmals kurz erläutert.

In den Unterkapiteln 1.1 bis 1.5 werden zunächst allgemeine Fragestellungen beantwortet, wie z.B.: Welche Eigenschaften muss ein Körper erfüllen, damit man von einem Schwarzen Loch spricht? Warum ist es schwarz? Wie groß und wie schwer können Schwarze Löcher sein und wie entstehen sie?

Anschließend wird mithilfe dieses Wissens in Kapitel 1.6 diskutiert, inwiefern man überhaupt eine Aussage über die Existenz von Schwarzen Löchern machen kann.

### 1.1 Wie schnell muss man sein um von einem Planeten wegzufiegen?

Bevor wir uns den Schwarzen Löchern zuwenden müssen wir zuerst verstehen, wie die Masse und die Größe eines Himmelskörpers mit dem Entkommen aus der daraus resultierenden Gravitation zusammenhängen.

Um der Gravitation eines Planeten (oder allgemein eines Himmelskörpers) mit der Masse  $M$  zu entkommen, muss die kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  eines Gegenstandes mindestens so groß sein wie die potentielle Energie  $E_{\text{pot}}$ , die er an seinem Startpunkt besitzt. Möchte man beispielsweise einen Astronauten ins All schießen, so entspricht seine Starthöhe  $h$  dem Radius  $R$  der Erde. Damit er durch die Erdanziehungskraft nicht wieder heruntergezogen wird, muss seine Masse  $m$  auf eine genügend große Geschwindigkeit  $v$  gebracht werden.

Diese Geschwindigkeit wird Fluchtgeschwindigkeit  $v_{\text{Fl}}$  genannt. Die Formel zur Berechnung dieser Geschwindigkeit, in Abhängigkeit der Masse  $M$  und der Größe (welche durch seinen Radius  $R$  gegeben ist) eines Himmelskörpers, können wir uns anhand dieser Zusammenhänge herleiten:

#### Die Fluchtgeschwindigkeit $v_{\text{Fl}}$

Es muss mindestens gelten:  $E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}$ , beziehungsweise  $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ .

Mit der allgemeinen Beschreibung für  $g = G \frac{M}{R^2}$  und  $h = R$  folgt:  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R}$

(Gravitationskonstante:  $G = 6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ )

Nach  $v$  umgestellt erhalten wir die Formel für die Fluchtgeschwindigkeit  $v_{\text{Fl}}$ :

$$v_{\text{Fl}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Im Folgenden sind die Massen  $M$ , die Radien  $R$  und die daraus resultierenden Fluchtgeschwindigkeiten  $v_{\text{Fl}}$  einiger Himmelskörper aufgeführt.

Himmelskörper	$M$ in kg	$R$ in km	$v_{\text{Fl}}$ in km/s	$v_{\text{Fl}}$ in km/h
Mond	$7,349 \cdot 10^{22}$	1.738		8.280
Mars	$6,419 \cdot 10^{23}$	3.396	5,0	18.000
Erde	$5,974 \cdot 10^{24}$	6.378		
Jupiter	$1,899 \cdot 10^{27}$		59,6	214.560
Sonne		696.704	617,3	2.222.280

Tabelle 1: Einige Himmelskörper und deren Fluchtgeschwindigkeiten  $v_{\text{Fl}}$ .

### In Tabelle 1 fehlt doch was!

#### Aufgabe 1

Wie schnell muss eine Rakete eigentlich fliegen, um von der Erde wegzukommen? Wie schwer ist die Sonne? Wie groß der Jupiter?

Berechne die fehlenden Daten in Tabelle 1 anhand der Formel für die Fluchtgeschwindigkeit  $v_{\text{Fl}}$  um Antworten auf diese Fragen zu erhalten. Du kannst die Werte direkt in die Tabelle eintragen, da wir sie später noch brauchen werden.

## 1.2 Wenn selbst das Licht nicht mehr fliehen kann – Der Ereignishorizont

Wir haben gesehen das man eine gewisse Geschwindigkeit erreichen muss um von einem Planeten zu entkommen. Was aber passiert wenn der Planet so massereich ist, dass die Fluchtgeschwindigkeit  $v_{\text{Fl}}$  sich der Lichtgeschwindigkeit nähert? Ab einer bestimmten Grenze kann dann aufgrund der enormen Gravitation nicht einmal mehr Licht dem Himmelskörper entkommen. Folglich kann dieser Körper also nicht leuchten oder Licht reflektieren, sondern ist absolut schwarz. Daher nennt man ein solches Objekt auch ein Schwarzes Loch.

Betrachten wir nun nochmals Formel 1, um diesen Zusammenhang quantitativ erfassen zu können: Die Fluchtgeschwindigkeit  $v_{\text{Fl}}$  steigt für große Massen und sinkt bei einem großen Abstand zwischen den beiden Körpern. Damit eine dermaßen hohe Gravitation wirken kann, muss also die Masse im Verhältnis zum Abstand sehr groß sein. Der Abstand, ab dem die Fluchtgeschwindigkeit  $v_{\text{Fl}}$  dann gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, nennt man den Schwarzschildradius  $r_s$ .

### Der Schwarzschildradius $r_s$

Wir setzen also die Fluchtgeschwindigkeit  $v_{\text{Fl}}$  gemäß Formel 1 gleich der Lichtgeschwindigkeit  $c$  und erhalten in Abhängigkeit der Masse  $M$  einen Radius  $R$ , ab dem Licht nicht mehr entkommen kann:

Formel 2

$$v_{\text{Fl}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = c$$

Umgestellt nach dem Radius  $R = r_s$  folgt der Schwarzschildradius (benannt nach dem deutschen Astronomen Karl Schwarzschild, 1873 - 1916):

$$R = r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Da nichts schneller sein kann als Lichtgeschwindigkeit, gelangen keinerlei Informationen von Ereignissen, die innerhalb dieses Abstandes passieren (für  $r \leq r_s$ ), nach außen. Zudem geht jede Information verloren, die von außen hinein gelangt, sie fällt quasi in ein Loch und verschwindet. Diese Grenze wird daher auch Ereignishorizont genannt. Wie es in einem Schwarzen Loch aussieht und was dort geschieht kann also nur durch theoretische Überlegungen berechnet, nicht aber beobachtet werden.

### Der Schwarzschildradius $r_s$ unserer Erde und der Sonne

Aufgabe 2

Um eine Vorstellung davon zu bekommen wie groß so ein Schwarzschildradius eigentlich ist, betrachten wir ihn für unsere Erde und die Sonne. Nehmen wir also an, die Erde würde immer mehr schrumpfen, ohne dabei Masse zu verlieren.

Auf welchem Radius müsste die Erde zusammenschrumpfen um ein Schwarzes Loch zu bilden? Wie klein müsste die Sonne werden?

Tipp: Nutze die Daten aus Tabelle 1 um den jeweiligen Schwarzschildradius  $r_s$  zu berechnen.

Wegen der enormen Gravitation nehmen Schwarze Löcher jegliche Materie auf die sich ihnen nähert und gibt diese nicht wieder frei. Daher kann ihre Masse im Laufe der Zeit immer weiter zunehmen und ihr Schwarzschildradius  $r_s$  dehnt sich infolge dessen aus.

Angst müssen wir vor ihnen dennoch nicht haben, denn sie wirken immer nur in ihrer unmittelbaren Umgebung. Wäre unsere Sonne z.B. ein Schwarzes Loch mit derselben Masse, würde die Erde auf derselben Bahn um die „schwarze Sonne“ weiterlaufen, da die wirkende Gravitation nur vom Abstand und der Masse der Sonne abhängig ist und nicht davon, wie diese beschaffen ist (sie kann als Gas, als fester Körper, oder eben als Schwarzes Loch vorliegen). Jedoch ist bei einem Schwarzen Loch die Masse so kompakt zusammengepresst, dass man aufgrund der geringen Ausdehnung viel näher an sie heran kann und kleinere Abstände bedeuten eine höhere Gravitation. Bei diesen sehr kleinen Abständen würde man sich bei einem Stern schon innerhalb der ausgedehnten Materie (bzw. auf dessen Oberfläche) befinden (dazu später mehr in Kapitel 1.4).

### 1.3 Wie groß und wie schwer sind Schwarze Löcher?

Theoretisch können Schwarze Löcher eine beliebig große Masse haben. Es muss nur irgendeinen Prozess geben, der die Masse unterhalb des beschriebenen Schwarzschildradius komprimiert. In den vorangegangenen Überlegungen haben wir gelernt, dass der entsprechende Prozess, der diese Komprimierung auslöst, sehr extrem sein muss und mit riesigen Energien einhergeht. Somit ist die Masse eines Schwarzen Lochs eng mit der Art seiner Entstehung verknüpft (hierzu aber mehr in Kapitel 1.4).

Man klassifiziert Schwarze Löcher anhand ihrer Masse und dem damit verbundenen Radius. Mithilfe Tabelle 2 können wir diese Unterteilung in die vier Klassen ablesen. Die Masse wird dabei allgemein als Vielfaches der Masse unserer Sonne angegeben (Sonnennasse:  $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30}$  kg) und große Strecken (wie z.B. beim Radius von supermassiven Schwarzen Löchern) mit der sogenannten „astronomischen Einheit“, dem mittleren Abstand von der Sonne zur Erde (Astronomical Unit: AU = 149.597.870.691 m  $\approx 150 \cdot 10^6$  km).

Klasse	Masse $M$	Radius $r_S$
Supermassiv	$\sim 10.000-10^{10} M_{\odot}$	$\sim 0,001 - 10$ AU
Mittelschwer	$\sim 1.000 M_{\odot}$	$\sim 10^3$ km
Stellar	$\sim 10 M_{\odot}$	$\sim 30$ km
Primordial	bis zur Masse des Mondes	bis zu $\sim 0,1$ mm

Tabelle 2: Klassifizierungen Schwarzer Löcher nach ihrer Masse und ihrem Radius

Wenn wir von der Größe und der Masse eines Gegenstands sprechen, liegt es natürlich nahe auch seine Dichte zu analysieren. Betrachten wir also die Dichte eines Schwarzen Lochs:

#### Die Dichte $\rho$ von Schwarzen Löchern

Die Dichte  $\rho$  ist bekanntlich definiert über die Masse  $M$  pro Volumen  $V$ , welches hier dem Kugelvolumen innerhalb des Schwarzschildradius  $r_S$  (Formel 2) entspricht. Es ergibt sich also:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r_S^3} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r_S^3} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi \frac{8 G^3 M^3}{c^6}} = \frac{3 c^6}{32 \pi G^3 M^2}$$

Da alle Parameter bis auf  $\rho$  und  $M$  konstant sind, ist die Dichte direkt von der Masse des Schwarzen Lochs abhängig und umgekehrt proportional zu ihrem Quadrat. Das bedeutet, dass massereiche (und somit große) Schwarze Löcher kaum Dichte besitzen.

#### Wie Dicht ist die Masse in unterschiedlich großen Schwarzen Löchern?

Berechne die Dichte  $\rho$  von Schwarzen Löchern aus den unterschiedlichen Klassifizierungen (außer primordialen) nach Tabelle 2 und der Sonne. Benutze dazu jeweils das schwerstmögliche einer Klasse. Vergleiche schließlich die Dichtewerte unter der Frage, ob sich die Masse eines Schwarzen Lochs stark darauf auswirkt.

Tipp: Die endgültige Formel 3 gilt nur für Schwarze Löcher, nicht für die Sonne!



## 1.4 Die Entstehung eines Schwarzen Lochs

Wie in der Einleitung beschrieben, sind Schwarze Löcher Gegenstand aktueller Forschungen in der Astrophysik. Dazu gehört insbesondere auch die Klärung der Entstehung Schwarzer Löcher. Nicht alle Entstehungsmöglichkeiten sind zweifellos geklärt, wobei vorhandene Erklärungen hierzu in erster Linie auf hypothetischen Theorien beruhen. Am ehesten ist die Entstehung sogenannter stellarer Schwarzer Löcher geklärt.

Kurz gesagt, sind stellare Schwarze Löcher das Endstadium von Sternen. Dabei wird nicht jeder Stern zu einem Schwarzen Loch, sondern nur besonders massereiche. Wie die Entwicklung eines Sterns abläuft und unter welchen Voraussetzungen dieser zu einem Schwarzen Loch wird, ist grundsätzlich von dessen Masse  $m$  abhängig. Die Zusammenhänge können wir mithilfe folgender Abbildung 1 erschließen.

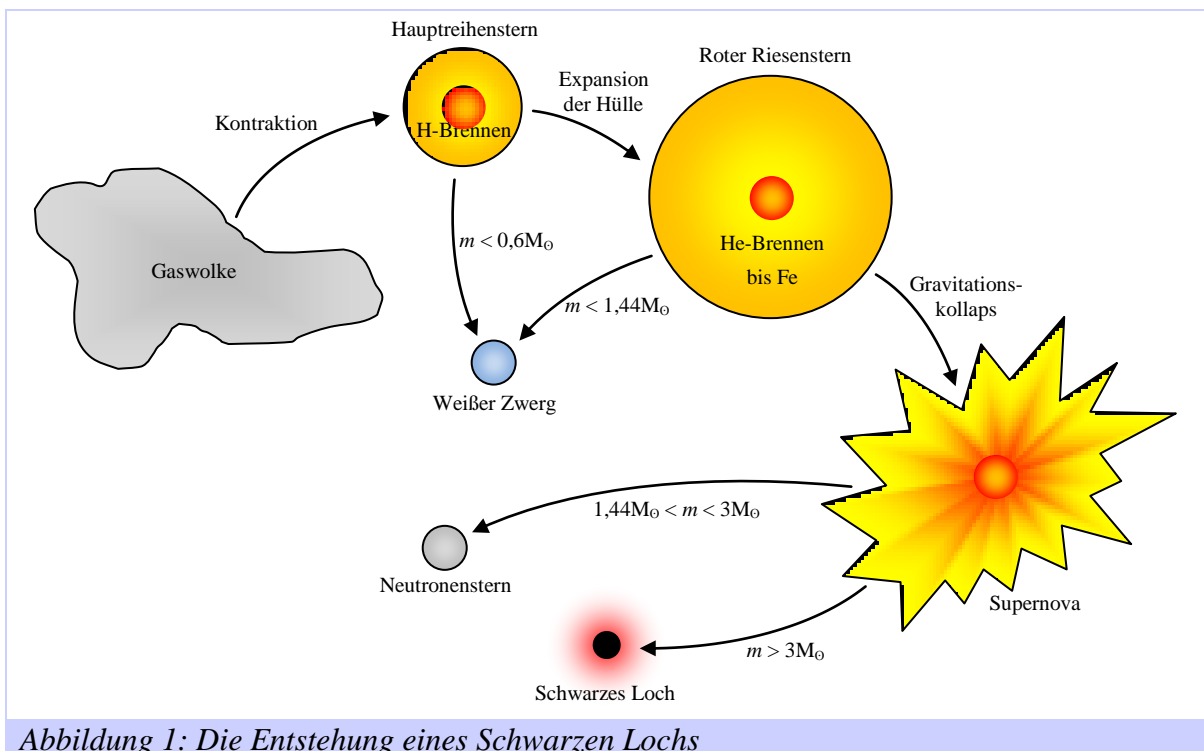


Abbildung 1: Die Entstehung eines Schwarzen Lochs

Ein Stern entsteht, indem eine Gaswolke (1), die überwiegend aus Wasserstoff (H) besteht, sich wegen der eigenen Schwerkraft immer mehr verdichtet. Aufgrund der freiwerdenden Gravitationsenergie steigt die Temperatur immer weiter an und schließlich kommt es zu Kernfusionsprozessen, nämlich dem sogenannten H-Brennen (2), das Verbrennen von Wasserstoff zu Helium (He). In dieser Phase (in der sich u.a. auch unsere Sonne befindet) verbringt der Stern etwa 90% seiner Lebenszeit, weswegen man den Stern in dieser Hauptphase auch „Hauptreihenstern“ nennt. Wenn die Masse  $m$  des Sterns kleiner ist als das 0,6-fache unserer Sonne, wird er nach dem Verbrennen des Wasserstoffs zu einem weißen Zwerg, da aufgrund der geringen Masse nicht genug Gravitationsdruck aufgebracht wird, um weitere Kernfusionen in Gang zu bringen.

Ist die Masse allerdings größer als diese 0,6 Sonnenmassen, kommt es zum He-Brennen (3), dem Verbrennen von Helium (He) zu Eisen (Fe). Während dieser Phase ist der Stern gegenüber der Hauptphase (2) bedeutend vergrößert und hat folglich eine niedrigere durchschnittliche Temperatur, weswegen er vermehrt rotes Licht emittiert (niedrigere Temperaturen führen zu einer niedrigeren Energie, welche wiederum zu einer niedrigeren Frequenz des emittierten Lichts führt). Man nennt ihn deshalb auch einen roten Riesenstern.

Wenn der Stern zu Eisen fusioniert ist, gibt es keine Kernschmelzungsvorgänge mehr, deren thermischer Druck nach außen geht, also dem Druck der Gravitation nach innen entgegenwirkt. In diesem Zustand können nur noch die Atome selber die Struktur der Materie erhalten (Elektronendruck). Wenn die Masse des Sterns dann immer noch kleiner als  $1,44 M_{\odot}$  ist, kann die Struktur stabil bleiben und der Stern wird schließlich auch zu einem weißen Zwerg. Wenn die Masse allerdings noch größer als diese  $1,44 M_{\odot}$  ist, werden die Elektronen wegen der massiven Gravitation in den Kern gedrückt. Es kommt zu einem sogenannten Gravitationskollaps und der Stern explodiert in einer Supernova (4). Wenn die übrig gebliebene Masse des Sterns nach dieser Supernova noch unter 3 Sonnenmassen liegt, kann sich der Stern wieder als Neutronenstern stabilisieren. Wenn die Masse hingegen größer als  $3 M_{\odot}$  ist, wird sämtliche Materie zusammengepresst und jede Struktur aufgelöst. Es entsteht ein Schwarzes Loch mit extrem hoher Dichte. Stellare Schwarze Löcher sind also sinngemäß „massive Sternleichen“. Was dabei genau mit den Atomkernen und Elektronen passiert, kann nach heutigem Stand der Wissenschaft nicht genau erklärt werden.

Neben den stellaren Schwarzen Löchern gibt es (wie wir in Kapitel 1.3 gesehen haben) weitere Klassen, deren Entstehung jedoch noch nicht zweifelsfrei geklärt ist. Aktuelle Forschungen der Astrophysik beschäftigen sich mit dieser Frage. Man vermutet, dass manche Schwarze Löcher älter sind als die Galaxien, in denen sie vorkommen. Einige sind sogar wohl nur kurze Zeit (im Verhältnis zum Alter unserer Galaxie gesehen) nach dem Urknall entstanden. Es weist vieles darauf hin, dass die Entstehung von Schwarzen Löchern und entsprechenden Galaxien miteinander verknüpft ist.

#### Zwei Beispiele für die mögliche Entstehung von Schwarzen Löchern

- a) Wird unsere Sonne (also ein Hauptreihenstern mit der Masse  $m = 1 M_{\odot}$ ) in ferner Zukunft zu einem roten Riesenstern? Wenn ja, wird sie in einer Supernova explodieren wenn man davon ausgeht, dass ihre Masse während des He-Brennens nicht abnimmt? Ist es sogar möglich, dass die Sonne zu einem stellaren Schwarzen Loch wird?
- b) Ein roter Riesenstern mit 8 Sonnenmassen verliert während des He-Brennens 6% seiner Masse und explodiert dann in einer Supernova. Bei dieser Supernova wird dann 55% seiner aktuellen Masse ins Weltall geschleudert. Bestimme den Zustand des übriggebliebenen Kerns.



## 1.5 Wachsen Schwarze Löcher? - Die Hawking-Strahlung

Ein Schwarzes Loch zieht wegen seiner starken Gravitationskraft immer mehr Materie und Energie in sich hinein. Durch die zunehmende Masse würde der Schwarzschildradius immer größer werden und so noch mehr Materie in sich aufsaugen. Demnach kann es nur wachsen. Aber ist dies wirklich so? Der sehr bekannte Physiker Stephen W. Hawking hat eine Antwort gefunden, warum dies nicht zwingend der Fall ist und Schwarze Löcher sogar schrumpfen können. Aber wie kann das sein wo doch nichts ihrem Ereignishorizont entkommen kann? Die Antwort liefert quasi das „Nichts“.

Dort wo „Nichts“ ist, ist nach der Physik trotzdem immer etwas. Selbst ein Vakuum, oder ein „leerer“ Punkt irgendwo im Universum ist nicht leer. Nach der Quantentheorie kann an jedem Ort und zu jeder Zeit ein Teilchen-Antiteilchen-Paar entstehen. So würde die Entstehung eines Elektrons und eines Positrons gegen kein physikalisches Gesetz verstoßen, da sie wegen ihrer umgekehrten Energie zusammen Null ergeben und so der Energieerhaltung entsprechen.

In Abbildung 2 kannst Du verschiedene Fälle der Entstehung solcher Paare um ein Schwarzes Loch sehen. Einige Teilchen-Antiteilchen-Paare entstehen außerhalb des Schwarzen Lochs und löschen sich kurz danach wieder aus oder verschwinden zusammen hinterm Ereignishorizont, wohingegen bei einigen Paaren nur ein Teilchen ins Loch fällt.

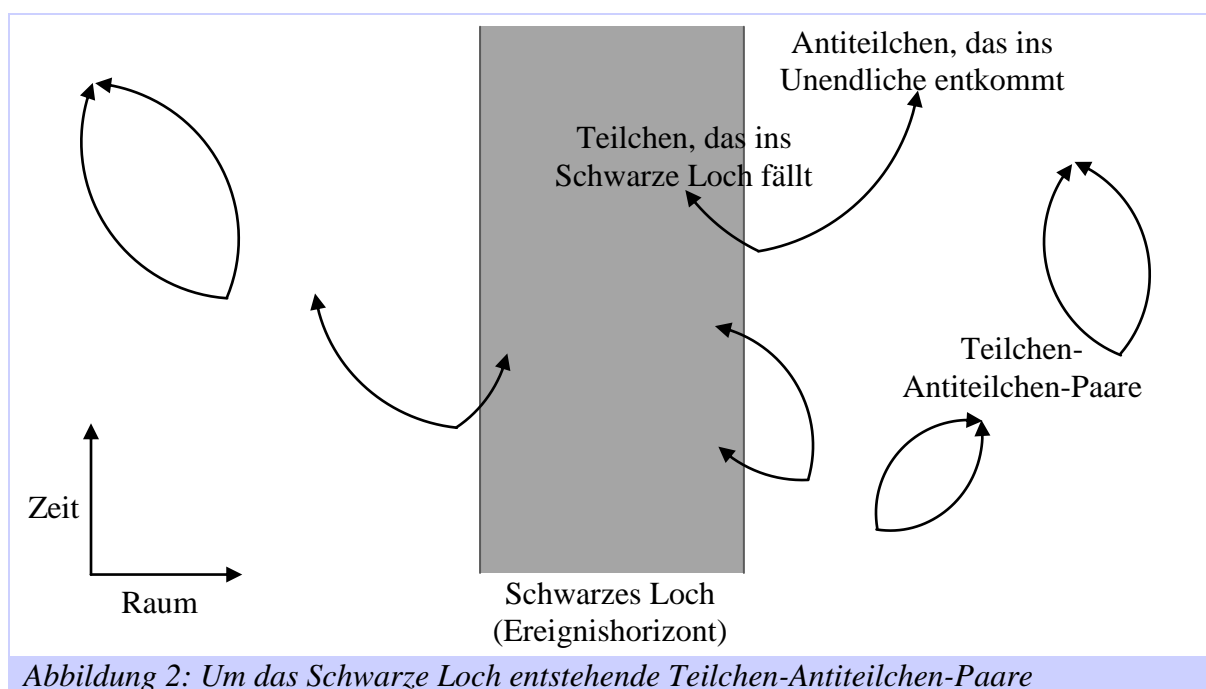


Abbildung 2: Um das Schwarze Loch entstehende Teilchen-Antiteilchen-Paare

Entscheidend ist nun der Fall, in dem ein Teilchen ins Schwarze Loch fällt und das andere entkommt. Das einfallende setzt dabei nämlich seine potentielle Energie frei und verringert dadurch die Energie (bzw. Masse) des Schwarzen Lochs, während das wegfliegende der Hawking-Strahlung entspricht.

Durch diesen Effekt können inaktive Schwarze Löcher sogar "sterben", indem ihre zuletzt noch verbleibende Energie in einem Gamma-Strahlen-Blitz freigesetzt wird. Ihre Lebensdauer beträgt aber mehrere Milliarden Jahre, weshalb solch ein Blitz und damit das Sterben eines Schwarzen Lochs bislang noch nicht beobachtet werden konnte.

## 1.6 Gibt es sie denn wirklich?

Wie wir bis hierhin gelernt haben, hat ein Schwarzes Loch eine so starke Gravitation, dass aus ihm keinerlei Information entfliehen kann. Daher kann man Schwarze Löcher nicht direkt sehen. Wie kann man dann überhaupt eine Aussage darüber machen, ob es sie wirklich gibt? Mittlerweile haben wir schon einige Dinge über Schwarze Löcher und deren Eigenschaften gelernt. Dieses Wissen kann man sich zunutze machen, um indirekt auf die Existenz von Schwarzen Löchern zu schließen.

So kann man unter anderem auf Schwarze Löcher schließen, indem man Sterne beobachtet, die sich auf bestimmten Bahnen um ein nicht sichtbares Zentrum bewegen. Dabei umkreisen sie das Zentrum auf verhältnismäßig kleinen Bahnen, aber mit einer sehr hohen Geschwindigkeit. Zum Beispiel beobachtete eine Gruppe Wissenschaftler im Jahre 2002 einen Stern, der sich dem galaktischen Schwerkraftzentrum der Milchstraße (die Galaxie in der wir leben) bis auf etwa 17 Lichtstunden (ca. 18 Milliarden km) näherte (Zum Vergleich: Unsere Erde ist etwa 26.000 Lichtjahre von diesem Zentrum entfernt, was ca. 0,25 Milliarden Milliarden km entspricht).

Dabei konnten die Wissenschaftler beobachten, wie sich der Stern dem Schwerkraftzentrum näherte, es umkreiste und in Folge dieser Bewegung eine Geschwindigkeit von fast 18.000.000 km/h erreichte. Diese Beobachtung konnte nur damit erklärt werden, dass sich im Zentrum der Milchstraße ein Körper mit einer riesigen Masse befindet, welches bei diesen Werten nur ein supermassives Schwarzes Loch sein kann.

Könnt ihr diese Schlussfolgerung ohne Probleme nachvollziehen? Zu eurer Unterstützung wollen wir kurz aufarbeiten, wie man die Masse eines Schwerkraftzentrums bestimmt, wenn man ein Objekt in dessen Umlaufbahn beobachtet:

### Berechnung der Masse eines Schwerkraftzentrums

Die Berechnungen dafür lassen sich leicht mit Methoden der Mechanik herleiten. Der Zusammenhang zwischen Masse des Zentrums und der Umkreisungsgeschwindigkeit des Sterns ergibt sich aus der Radialkraft und der Gravitationskraft.

Bei einer festen Bahn gilt:  $F_R = F_G$

Mit den jeweiligen bekannten Formeln ergibt sich: 
$$\frac{m_{\text{Stern}} \cdot v^2}{r_{\text{Bahn}}} = G \cdot \frac{m_{\text{Stern}} \cdot M_{\text{Zentrum}}}{r_{\text{Bahn}}^2}$$

Also: 
$$M_{\text{Zentrum}} = \frac{v^2 \cdot r_{\text{Bahn}}}{G}$$

Wir erkennen anhand von Formel 4, dass man von einer hohen Umkreisungsgeschwindigkeit  $v$  auf eine sehr hohe Masse  $M_{\text{Zentrum}}$  schließen kann. Bei sehr hohen Massen haben Körper im Allgemeinen auch eine große Ausdehnung. Wenn nun der recht kleine Umkreisungsradius des Sterns eine solch große Ausdehnung ausschließt, muss es sich um eine stark komprimierte Masse handeln, wie sie mitunter nur bei einem Schwarzen Loch vorhanden sein kann.

Ein weiteres Phänomen anhand dessen man Schwarze Löcher erkennen kann ist die Röntgenstrahlung, die um sie herum emittiert wird. Da Schwarze Löcher eine sehr starke Gravitation haben, wird Materie auf dem Weg zum Loch immer mehr beschleunigt und durch die Reibung der Teilchen extrem erhitzt (bis zu mehreren Millionen Grad). Hierbei entsteht eine sogenannte Akkretionsscheibe (dargestellt in Abb. 3, links), also eine um das Schwarze Loch rotierende Scheibe aus extrem heißem Gas (Plasma). Infolge dessen emittiert diese Materie hochenergetische Röntgen- oder Gammastrahlung in einem Maße, dass sie mithilfe von Teleskopen auf der Erde oder mit Satelliten gemessen werden kann (Abb. 3, rechts). Schwarze Löcher die gegenwärtig Materie aufnehmen und folglich an Masse zunehmen, nennt man „aktiv“. Inaktive Schwarze Löcher, die also derzeit keine Materie aufnehmen, strahlen folglich auch keine Röntgenstrahlung aus.

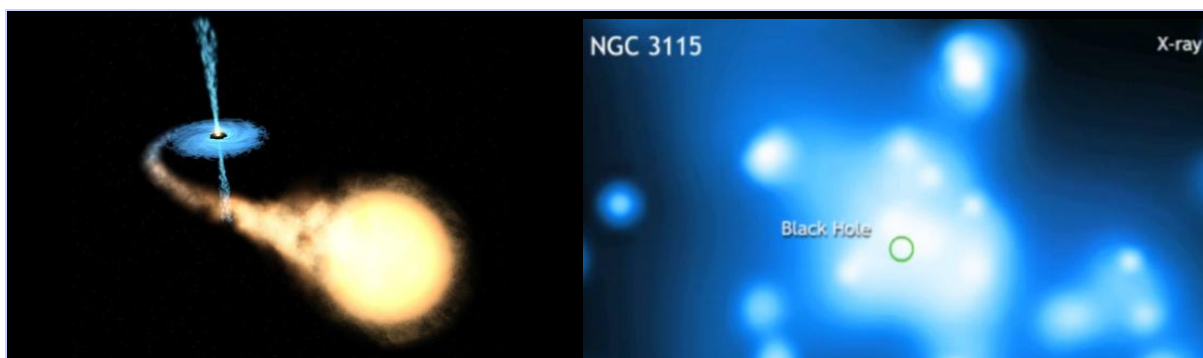


Abbildung 3: Akkretionsscheibe und Röntgenaufnahme eines aktiven Schwarzen Lochs

Wie bereits in der Einleitung angedeutet, werden solche Methoden in der Wissenschaft erst in der jüngeren Vergangenheit durchgeführt, was an der benötigten komplexen Technik für solche Untersuchungen liegt. Um Sterne und Galaxien zu beobachten, die dermaßen weit von uns entfernt liegen, benötigt man moderne hochauflösende Geräte, die entsprechende Aufnahmen ermöglichen. Solche Techniken haben sich erst in den letzten Jahren entwickelt bzw. sind immer noch in der Weiterentwicklung. Zum Beispiel stellte die atmosphärische Unschärfe (Luftturbulenzen in der Teleskopröhre, in der direkten Umgebung des Standorts oder auch in der Atmosphäre) lange Zeit ein großes Problem bei Aufnahmen des Weltraums dar, doch konnte diese mittlerweile bereinigt werden. So werden Schlüsselteleskope, Weltraumteleskope oder Satelliten mit neuster Technik entwickelt, die immer genauere Aufnahmen ermöglichen. In Abbildung 4 ist das sehr bekannte Hubble-Weltraumteleskop und die ALMA Antennen auf der Chajnantor Hochebene auf 5000m Höhe in Chile, die 2013 mit 66 fahrbaren Einzelantennen fertig gestellt werden, zu sehen.



Abbildung 4: Hubble-Weltraumteleskop und Schlüsselteleskope (ALMA Antennen)

Mithilfe solcher Methoden wurden in den letzten Jahren mehrere mögliche Schwarze Löcher entdeckt, wie z.B. das oben beschriebene supermassive Schwarze Loch Sagittarius A\* im Zentrum der Milchstraße. In der rechten Abbildung ist zu sehen, wie sich mehrere Sterne im Verlauf von 15 Jahren um dieses unsichtbare Zentrum bewegen. Nach derzeitigem Forschungsstand handelt es sich dabei um ein Schwarzes Loch mit etwa 4 Millionen Sonnenmassen, welches 26.000 Lichtjahre von der Erde entfernt ist. Allerdings ist dieses supermassive Schwarze Loch anscheinend nicht mehr aktiv.

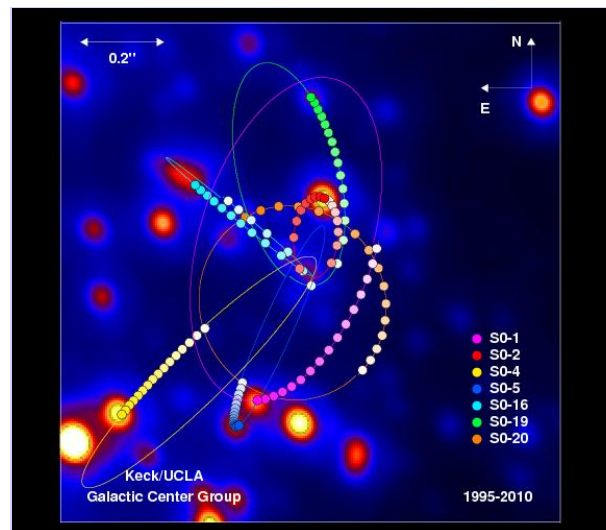


Abbildung 5: Bahnen um Sagittarius A\*

### Entdeckung von Schwarzen Löchern per Beobachtung und Rechnung

Wir wollen das Vorgehen bei der Entdeckung möglicher Schwarzer Löcher besser nachvollziehen. Daher betrachten wir folgende Situation: Astronomen haben in einer fernen Galaxie einen Stern entdeckt, der mit der Geschwindigkeit von  $v = 20.000.000 \text{ km/h}$  auf einer festen Bahn mit dem Radius  $r_{\text{Bahn}} = 1,17 \text{ Lichtstunden}$  um ein unbekanntes Zentrum kreist. Ob es Licht emittiert oder nicht, konnte bislang noch nicht festgestellt werden.

- a) Bestimme die Masse dieses unbekanntes Zentrums in Sonnenmassen.

Tipp: Beachte beim Rechnen unbedingt die Einheiten! Unter anderem gilt:  
 $1 \text{ Lh} = 1 \text{ Lj} / 365,25 \text{ d} / 24 \text{ h} = 1.079.252.848,8 \text{ km} \approx 1,1 \cdot 10^9 \text{ km}$

- b) Welchen Radius hätte das unbekanntes Zentrum, wenn es die Dichte der Sonne hätte, also ein gewöhnlicher Hauptreihenstern wäre?

Tipp: Die Dichte der Sonne hast Du bereits in Aufgabe 3 berechnet. Benutze die gleiche Formel hierfür, indem Du sie nach  $r$  umstellst.

- c) Diskutiere unter Berücksichtigung des Bahnradius  $r_{\text{Bahn}}$  und der Ergebnisse aus a) und b), ob es sich um ein Schwarzes Loch handelt.

Aktuelle Forschungen weisen sogar darauf hin, dass im Zentrum jeder Galaxie ein supermassives Schwarzes Loch liegt. Deren extreme Anziehungskraft scheint also eine wichtige Rolle dabei zu spielen die Galaxien, in denen sie sich befinden, „zusammenzuhalten“. Allem Anschein nach sind Schwarze Löcher wohl trotz ihrer extremen Eigenschaften ein normales Phänomen in unserem Universum. Sie stellen vermutlich einen fundamental wichtigen stabilisierenden Faktor in Sternengebilden dar.

## 2 Auswirkungen

Nachdem Du die Grundlagen zu Schwarzen Löchern kennengelernt hast, wollen wir noch etwas tiefer in die Materie eindringen. Dazu genügen nicht mehr die "einfachen" Gesetze der Mechanik, sondern es kommt ein Stück weit die Allgemeine Relativitätstheorie von Albert Einstein hinzu. Durch sie (und darauf basierende weitere Überlegungen) können verschiedene Auswirkungen der Schwarzen Löcher betrachtet werden. Die Allgemeine Relativitätstheorie ist mitunter gar nicht so einfach zu verstehen, wir werden das wichtigste aber in den kommenden Zusammenhängen klären.

### 2.1 Die Krümmung des Raums

Nachwievor gibt es keine genaue Erklärung, warum sich Massen anziehen. Die Gravitation ist momentan eines der größten Rätsel in der Physik. In der Allgemeinen Relativitätstheorie (kurz ART) bietet Albert Einstein aber eine neue Sichtweise darauf: Massen krümmen den Raum.

Nun haben wir aber folgendes Problem:

- Wir stellen uns eine Linie vor. Um jeden Punkt dieser Linie zu beschreiben genügt uns eine Achse, auf der diese Linie liegt ( $x$ -Achse).
- Wir stellen uns eine Fläche vor. Um jeden Punkt dieser Fläche zu beschreiben, genügen uns zwei Achsen ( $x$ - und  $y$ -Achse).
- Wir stellen uns einen Würfel vor. Um jeden Punkt dieses Würfels zu beschreiben, genügen uns dann drei Achsen ( $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse).
  
- Wir krümmen die Linie. Eine Achse genügt nun nicht mehr um sie zu beschreiben. Wir benötigen eine weitere Achse, die den jeweiligen Abstand der Linie zur ersten Achse angibt.
- Wir krümmen die Fläche. Zwei Achsen genügen nun nicht mehr um sie zu beschreiben. Wir benötigen eine weitere Achse, die die jeweiligen Abstände zur  $x$ - $y$ -Ebene angibt.
- Wir krümmen den Würfel. Drei Achsen genügen nun nicht mehr um ihn zu beschreiben. Wir benötigen eine vierte Achse. Dies ist nun das Problem. Unsere Wahrnehmung ist auf drei Dimensionen begrenzt. Eine vierte kann man sich dazu nicht mehr vorstellen.

Eine allgemeine Veranschaulichung dieser Krümmung ist für uns also nicht möglich. Wir können uns aber eines Modells bedienen, das die Krümmung abschnittsweise veranschaulicht. Dazu gehen wir wieder eine Dimension zurück und betrachten uns die Krümmung einer Fläche.

Nehmen wir beispielsweise ein Tuch und ein paar Kugeln um die Krümmung des Raums durch Planeten zu simulieren. Wenn wir das Tuch aufspannen und die Kugeln darauf legen, so wird es durch deren Massen gedehnt. Je größer die Masse, desto stärker die Ausdehnung. Wie Du in Abbildung 6 sehen kannst, dehnt die Sonne das Tuch besonders stark und die Erde wird in diese Beule hinunter rollen. Dies entspricht dann der Gravitation der Sonne auf die Erde. Die Erde beult das Tuch natürlich auch ein wenig aus, so dass der Mond zur Erde rollen wird. Würden wir nun der Erde eine Bewegung geben, so könnte sich bei der passenden Konstellation die stabile Umlaufbahn ergeben, bei der die Erdkugel ständig in der Beule um die Sonnenkugel rollt.

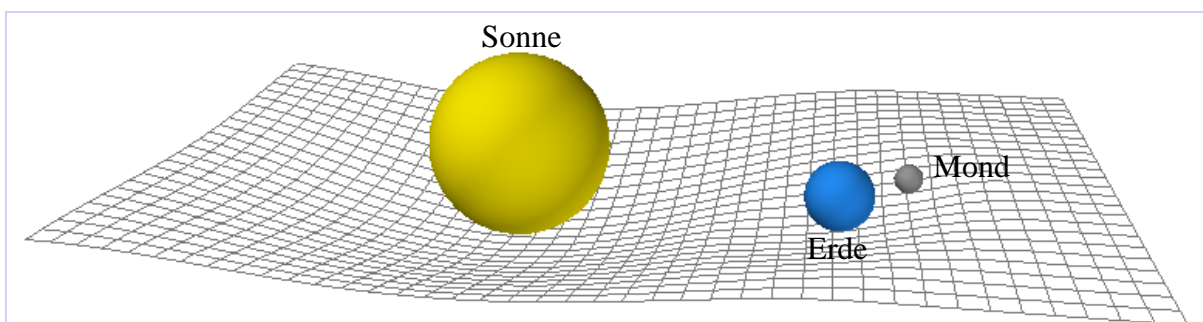


Abbildung 6: Veranschaulichung zur Krümmung des Raums

Betrachten wir nun die Krümmung des Raums durch Schwarze Löcher. Es wird schnell klar, dass dabei ein neues Problem entsteht. Im Zentrum eines Schwarzen Lochs (der Singularität) ist nämlich die Masse so groß, dass die Krümmung unendlich stark ist. Das angesprochene Tuch zur Veranschaulichung können wir aber auch hier nutzen. Abbildung 7 zeigt, wie es sich an der Position des Schwarzen Lochs so stark dehnt, dass es reißt und nun ein Loch hat (wir haben wieder eine Begründung für den Begriff Schwarzes "Loch" gefunden!).

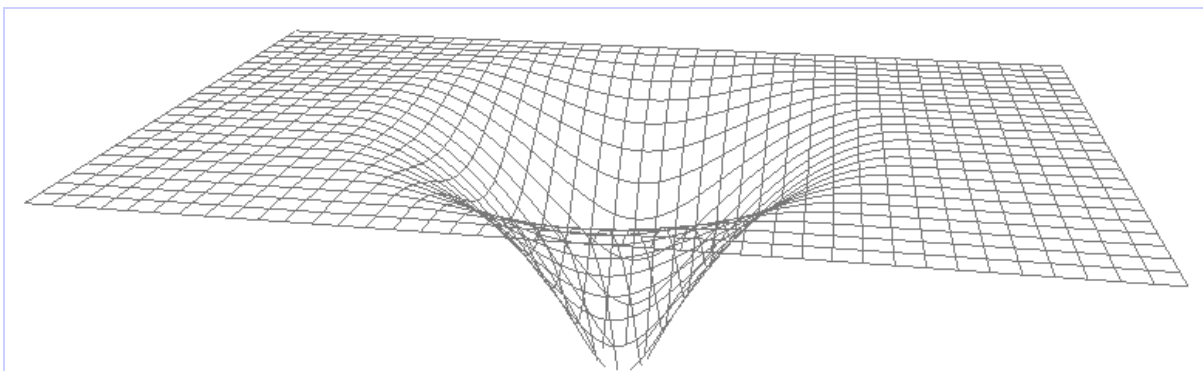


Abbildung 7: Krümmung des Raums durch ein Schwarzes Loch

Nun stellt sich wiederum die Frage, was mit Dingen passiert, die in dieses Loch geraten. Hier bietet unser Tuch-Modell eine der vielen möglichen Antworten: Die Dinge fallen durch das Loch, verschwinden damit von der Oberfläche des Tuches und sind in einer anderen Welt. In der Wissenschaft entspricht diese Vorstellung der Theorie der Paralleluniversen. Weitere Theorien sind z.B. die Wurmlöcher (Die Krümmungen mehrerer Schwarzer Löcher verbinden sich, wodurch hypothetisch eine Reise durch sie hindurch möglich ist) und die Zeitreisen (Da die Zeit in dem Loch still steht, könnte man in ihr zurück reisen, wenn man sich schneller als die Lichtgeschwindigkeit bewegt).



Zusätzlich zum Loch haben Schwarze Löcher noch eine weitere Auswirkung bei der Krümmung des Raums. Nähert sich etwas dem Schwarzen Loch, so wird es langgezogen und gequetscht. In Abbildung 8 ist ein Quadrat dargestellt, an dem wir diese Verformung nachvollziehen können. Die Seite A erfährt eine stärkere Gravitationskraft als die Seite B, die weiter davon weg ist. Das führt dazu, dass das Quadrat langgezogen wird. Die äußeren Seiten C und D werden zudem immer stärker nach innen zur Singularität gezogen, weshalb das Quadrat hier zusammengequetscht wird. Dieser Effekt wird geodätische Deviation (nach dem lateinischen deviare: „(vom Weg) abweichen“) genannt.

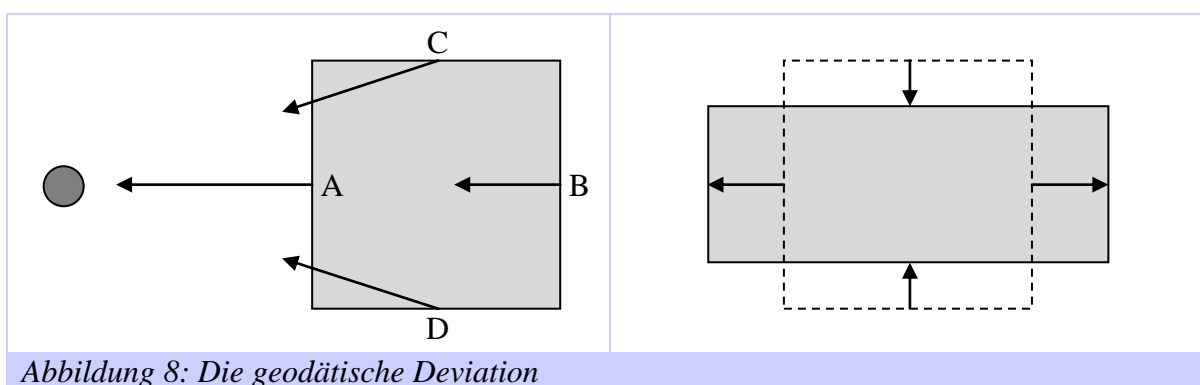


Abbildung 8: Die geodätische Deviation

Die Formel zur Berechnung der geodätischen Deviation ist recht kompliziert, wir wollen aber dennoch einen Einblick in die Stärke dieser Verformung bekommen. Dazu verwenden wir eine Vereinfachung, bei der wir direkt die uns bekannten Formeln für die Beschleunigung und die dabei zurückgelegte Strecke verwenden können.

### Beschleunigung $a$ und die dabei zurückgelegte Strecke $s$

Formel 5

Die Beschleunigung  $a$  durch Gravitation entspricht auf der Erde etwa:  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Im allgemeinen Fall ist sie:  $a = g = G \frac{M}{R^2}$  (mit  $G = 6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ )

Ein Gegenstand wird nun beschleunigt und legt folgende Strecke zurück:  $s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{GM}{2R^2} t^2$

Da sie Strecke  $s$  nun von zwei Variablen abhängt, nämlich dem Abstand  $R$  zum Zentrum und der Zeit  $t$ , vereinfachen wir unsere Anschauung und betrachten die zurückgelegte Strecke  $s$  nach einer Sekunde. Damit entfällt die Variable  $t$  und wir können einfach rechnen.

### Auswirkung der geodätischen Deviation

Aufgabe 6

Du wirst von einem Himmelskörper angezogen, wodurch sich deine Körpergröße ändert. Aber um wie viel? Berechne dies nach jeweils einer Sekunde für folgende Fälle:

- Du wirst durch die Erde angezogen und befindest dich 2 km über ihrer Oberfläche.
- Du wirst durch die Sonne angezogen und befindest dich 2 km über ihrer Oberfläche.
- Du wirst durch ein Schwarzes Loch mit 20 Sonnenmassen angezogen und befindest dich 6380 km von seinem Zentrum entfernt. (Dies entspricht  $R_{\text{Erde}} + 2 \text{ km}$ )

## 2.2 Die Ablenkung des Lichts - Der Gravitationslinseneffekt

Wie wir wissen, kann uns unsere Wahrnehmung manchmal täuschen. Steckst Du beispielsweise einen Finger in ein Glas Wasser, so scheint er an der Oberfläche geknickt zu sein, weil sich der Strahlengang des Lichts dort bricht. Unser Gehirn kann diese Brechung des Lichts aber nicht zurückverfolgen und es entsteht eine optische Täuschung. In der Astronomie kann man ähnliche Effekte beobachten. So befindet sich ein Stern nicht zwangsweise an der Position, an der wir ihn von der Erde aus sehen. Ist eine genügend große Masse zwischen dem Stern und uns, so wird selbst Licht dadurch abgelenkt. Diese Masse kann durch eine ganze Galaxie, einen massereichen Stern oder eben durch ein Schwarzes Loch gegeben sein.

Abbildung 9 zeigt einen Lichtstrahl, der im Abstand  $b$  zum Zentrum einer großen Masse vorbeiläuft und durch sie abgelenkt wird. Verfolgen wir das Licht von der Erde aus zurück und berücksichtigen dabei nicht diese Ablenkung, so erscheint der Ursprung des Lichts an einer anderen Position zu sein.

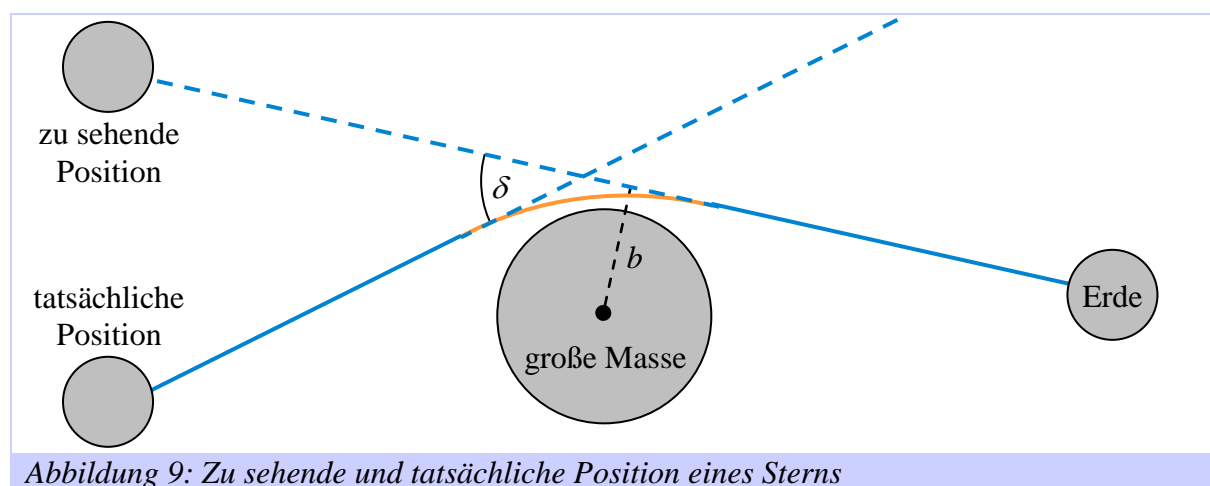


Abbildung 9: Zu sehende und tatsächliche Position eines Sterns

Wir vereinfachen die Situation und betrachten die Ablenkung des Lichts wie eine Parabel beim waagerechten Wurf. In  $x$ -Richtung bleibt also die gleichbleibende Fortbewegung erhalten und in  $y$ -Richtung wirkt durch die Anziehung des Himmelskörpers eine beschleunigte Bewegung, welche dann die Ablenkung des ankommenden Lichtstrahls hervorruft. Es genügt dabei die Strecke von 0 bis  $2R$  zu betrachten und dafür die Anziehungskraft zu erhöhen. Erstaunlicherweise ergibt sich dadurch der gleiche Winkel und die Formeln zur Berechnung werden vereinfacht. Wir betrachten also folgende Ablenkung:

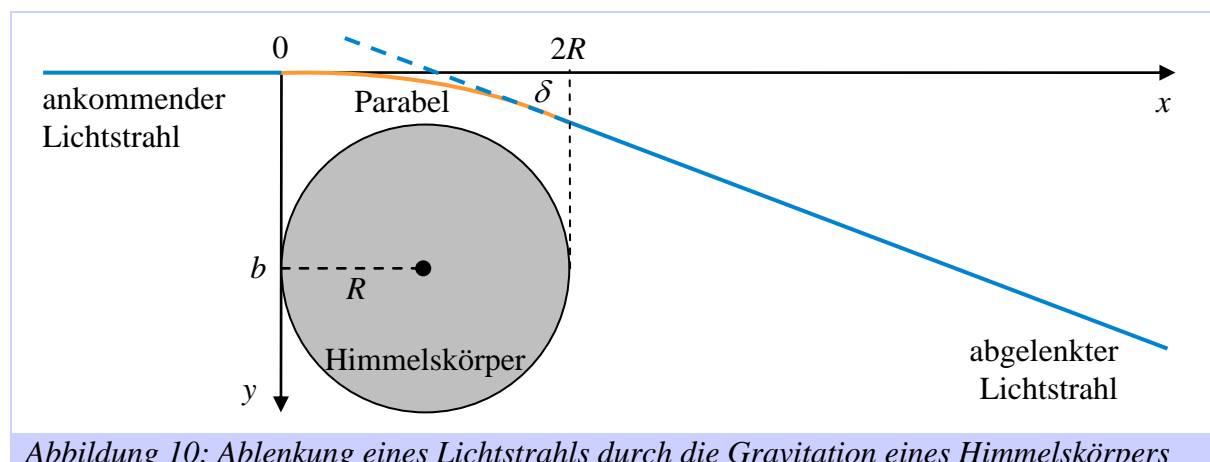


Abbildung 10: Ablenkung eines Lichtstrahls durch die Gravitation eines Himmelskörpers

Mit einfachen mathematischen Mitteln lässt sich nun eine Gleichung für die Ablenkung um den Winkel  $\delta$  herleiten. Dazu müssen wir zunächst eine Wiederholung machen, um die Gleichung für die Parabel bei einem waagerechten Wurf zu finden.

## Aufgabe 7

**Klassische Parabelgleichung für die Ablenkung des Lichts**

Leite die Gleichung der Parabel für diese Situation her.

Als Ergebnis solltest Du bekommen:  $y = \frac{GM}{2R^2c^2} \cdot x^2$

Tipp: Beim waagerechten Wurf gilt:  $x = v \cdot t$  und  $y = \frac{1}{2} a \cdot t^2$

Die Geschwindigkeit  $v$  wird durch das Licht und die Beschleunigung  $a$  durch die Gravitation bestimmt.

Wie in Abbildung 10 zu sehen ist, ist über die Steigung der Tangente bei  $x = 2R$  der Ablenkwinkel gegenüber der ursprünglichen Ausbreitung ( $x$ -Achse) bestimmt.

## Formel 6

**Formel für den Ablenkwinkel  $\delta$** 

Nach der klassischen Physik gilt für den Ablenkwinkel  $\delta$ :

$$\tan(\delta) = y'(2R) = 2 \cdot \frac{GM}{2R^2c^2} \cdot (2R) = 2 \cdot \frac{GM}{Rc^2}$$

Nutzt man die Allgemeine Relativitätstheorie anstatt der newtonschen Formeln, so ergibt sich erstaunlicherweise ein doppelt so großer Winkel, der auch experimentell bestätigt werden konnte. Es gilt also:

$$\delta = \tan^{-1} \left( 4 \cdot \frac{GM}{Rc^2} \right)$$

Wir wollen uns die Größe dieser Ablenkung einmal vor Augen führen. Dazu berechnen wir den Ablenkwinkel einmal für die Sonne und für ein Schwarzes Loch, um die Auswirkungen auf vorbeifliegende Lichtstrahlen zu vergleichen.

## Aufgabe 8

**Ablenkung von Licht durch unsere Sonne**

- Berechne den Ablenkwinkel  $\delta$  für Lichtstrahlen, die den Rand unserer Sonne streifen.
- Berechne ihn ebenfalls für den Fall, dass die Sonne zu einem Schwarzen Loch wurde.

Tipp: Entnehme die Daten unserer Sonne aus der vervollständigten Tabelle 1. Verwende für den zweiten Teil der Aufgabe den Schwarzschildradius  $r_s$ , der Sonne, den Du in Aufgabe 2 berechnet hast.

Wenn Aufgabe 8 berechnet wurde sieht man deutlich den Unterschied in der Ablenkung von Lichtstrahlen durch einfache Sterne und durch Schwarze Löcher. Massereichere Schwarze Löcher können das Licht noch mehr anziehen. Sie werden mitunter zu einem Karussell für Lichtstrahlen, da sie das Licht sogar mehrere Male um sich herum wirbeln, bis es der Gravitation wieder entkommen kann. Man kann dann durch einfache Beobachtung nicht mehr unterscheiden, ob das Licht an ihnen vorbei flog, ob es sich einmal um das Schwarze Loch gedreht hat, oder ob es dies gleich mehrmals durchstehen musste.

### 2.3 Zeit ist relativ, besonders bei großen Massen

Wir haben erfahren, dass große Massen eine derartige Gravitation ausüben, dass sogar Lichtstrahlen abgelenkt werden. Gravitation zieht aber nicht nur andere Massen an, sie kann sogar die Zeit verändern. Spätestens seit Albert Einstein wissen wir, dass die Zeit relativ ist. Aber wieso ist das eigentlich so? Und was hat das mit Schwarzen Löchern zu tun? Dies wollen wir in diesem Kapitel klären.

Zunächst behandeln wir die Frage, warum Zeit relativ ist und unter welchen Umständen sie sich ändert. Die Verlängerung bzw. Verkürzung der Tickrate von Uhren wird Zeitdilatation (nach dem lateinischen Wort für Verlängerung, Ausdehnung) genannt und kann durch zwei Umstände hervorgerufen werden.

Zum einen sieht ein Beobachter jede relativ zu ihm bewegte Uhr langsamer ticken (und natürlich auch jede andere Aktion in dieser langsameren Zeit). Die Zeitdilatation ist dabei umso stärker, je schneller sich das Beobachtete relativ zum Beobachter bewegt. Dieser Effekt ist für die uns umgebenen Vorgänge kaum zu spüren. Erst wenn sich die relative Bewegung der Lichtgeschwindigkeit nähert, wird man diese Zeitdilatation bemerken. Hierauf werden wir aber nicht weiter eingehen, da der zweite Umstand für das Thema "Schwarze Löcher" entscheidender ist.

Die Veränderung der Zeit wird auch durch verschiedene Positionen in einem Gravitationsfeld hervorgerufen. Man spricht dabei von der gravitativen Zeitdilatation. Sie ist davon abhängig in welcher Entfernung man sich zu einem Gravitationszentrum befindet. Einstein hat daher den Raum an sich mit der Zeit zusammengefasst und nennt es die Raumzeit (mit 4 statt 3 Dimensionen). In Kapitel 2.1 haben wir die Krümmung des Raums durch große Massen betrachtet, bei der gravitativen Zeitdilatation geschieht dies nun auch mit der Zeit.

Experimente zur Bestätigung dieser Theorie wurden bereits 1960 im Pound-Rebka-Experiment und 1976 durch die NASA durchgeführt. Sie schickten eine Rakete mit einer Atomuhr ins Weltall und ließen eine exakt baugleiche Atomuhr auf der Erde. Während des Fluges und nach der Landung der Rakete wurden die Uhren verglichen und der Zeitunterschied entsprach den theoretisch erwarteten Werten gemäß der gravitativen Zeitdilatation.

Wir wollen uns diese Theorie einmal veranschaulichen. In Abbildung 11 siehst Du ein Teilchen, das von einer Gravitationsquelle (zum Beispiel einem Schwarzen Loch) angezogen wird und ein stehendes Teilchen, welches das einfallende beobachtet. An der Ausgangsposition vergeht für beide die Zeit noch gleich schnell. Je näher das einfallende Teilchen allerdings der Gravitationsquelle ist, desto langsamer scheint die Zeit im Vergleich zum stehenden zu vergehen. Wie Du an den Uhren erkennen kannst, vergehen beim stehenden Teilchen 15 Minuten, während kurz vor der Gravitationsquelle nur 5 Minuten vergehen. Dies fällt aber nur dem beobachtenden stehenden Teilchen auf, das einfallende wird keinen Unterschied im Vergehen der Zeit bemerken, da alles um es herum ebenso die langsamere Zeit erfährt. Daher ist die Zeit relativ.

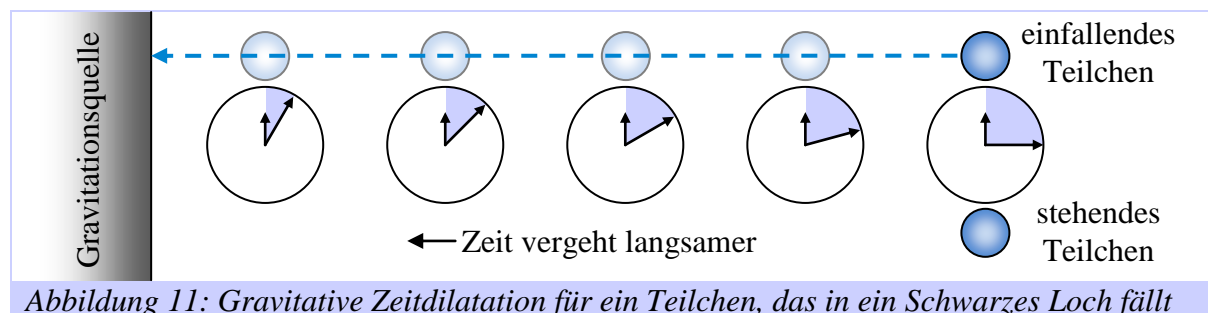


Abbildung 11: Gravitative Zeitdilatation für ein Teilchen, das in ein Schwarzes Loch fällt

Umgekehrt verhält es sich natürlich beim Verlassen des Gravitationsfeldes. Je weiter man sich von der gravitativen Quelle entfernt befindet, desto schneller vergeht die Zeit. Dieses Phänomen wird vor allem bei elektromagnetischen Wellen (z.B. Licht) deutlich. Durch die gravitative Zeitdilatation ist das Intervall einer Wellenlänge umso länger, je weiter sich das Licht aus dem Gravitationsfeld heraus bewegt, wie Du am Verlauf der Welle in Abbildung 12 sehen kannst. Wie wir wissen entsprechen längere Wellenlängen einer geringeren Energie, wodurch die Farbe des Lichts in Richtung Rot verschoben wird. Man spricht daher in diesem Zusammenhang von der gravitativen Rotverschiebung.

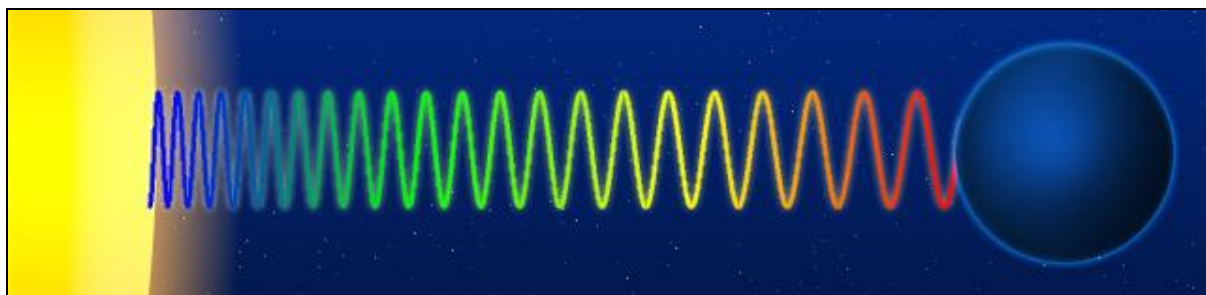


Abbildung 12: Gravitative Rotverschiebung einer elektromagnetischen Welle

Die Erde besitzt im Vergleich zu vielen anderen Himmelskörpern ein niedriges Gravitationsfeld. Daher ist die Auswirkung der gravitativen Zeitdilatation und somit auch der gravitativen Rotverschiebung recht gering. Beispielsweise dauert eine Sekunde in 3.000 km Höhe  $4,4 \cdot 10^{-10}$  s länger. Dennoch muss zum Beispiel beim satellitengestützten GPS-Navigationssystem der Einfluss auf die gesendeten Signale (und der Einfluss durch die relative Bewegung des Satelliten zum GPS-Empfänger) berücksichtigt werden, damit die Position so genau wie möglich ermittelt werden kann. Schließlich geht es dabei gerade um die Laufzeiten, die die jeweiligen Signale der Satelliten bis zur Position benötigen.

Nachdem wir eine anschauliche Vorstellung der Rotverschiebung kennengelernt haben, wollen wir noch die mathematische Herleitung betrachten:

### Die Rotverschiebung

Die Energie eines unbewegten Teilchens ist nach Einstein durch dessen Masse  $m$  bestimmt und nach de Broglie kann ihr bekanntlich auch eine Frequenz zugeordnet werden:

$$E_{\text{Ruhe}} = mc^2 \quad E = hf$$

An einem Ausgangspunkt  $r_0$  in einem Gravitationsfeld mit dem Potential  $U(r)$  ergibt sich somit folgende Energie für das Teilchen:

$$E_0 = E_{\text{Ruhe}} + E_{\text{pot}} = mc^2 + mU(r_0) = hf_0$$

Bewegt es sich nun mit der Geschwindigkeit  $v$  in dem Gravitationsfeld, so folgt:

$$E = E_{\text{Ruhe}} + E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mU(r) = hf$$

Damit gilt für die Differenz der Energien:

$$\begin{aligned} E - E_0 &= hf - hf_0 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mU(r) - mc^2 - mU(r_0) = m \left( \frac{1}{2}v^2 + (U(r) - U(r_0)) \right) \\ &= mc^2 \left( \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{U(r) - U(r_0)}{c^2} \right) = (hf_0 - mU(r_0)) \left( \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{U(r) - U(r_0)}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Da nun  $mc^2$  (und damit auch  $hf_0$ ) sehr viel größer ist als  $mU(r_0)$  gilt:

$$hf - hf_0 \approx hf_0 \left( \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{U(r) - U(r_0)}{c^2} \right)$$

$$\text{Also: } \frac{f - f_0}{f_0} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad \text{mit } U(r) = \frac{-GM}{r}$$

Dies entspricht: **Rotverschiebung = relativistische Zeitdilatation - gravitative Rotverschiebung**

Wir betrachten abschließend noch einige Spezialfälle dieser Formel.

### Was wir aus der Formel für die Rotverschiebung lernen können

- Was sagt uns Formel 7 über ein stillstehendes Teilchen? ( $v = 0$ )
- Was über ein fliegendes Teilchen, das sich stets im gleichen Gravitationspotential befindet? ( $r = r_0$ )
- Und was passiert mit der Frequenz, wenn das Teilchen wegfliegt? ( $r \rightarrow \infty$ )



## 2.4 Der hypothetische Fall in ein Schwarzes Loch

Zum Abschluss dieses Lernmaterials betrachten wir noch, was eigentlich passiert, wenn man in ein Schwarzes Loch hinein fällt. Dieses Kapitel ist als Lückentext geschrieben, damit Du abschließend kontrollieren kannst, ob Du das neugelernte Wissen über Schwarze Löcher richtig verstanden hast und mit den Begriffen umgehen kannst.

Die extrem schwere Sonne aus unserem Nachbarsystem hatte sich längst zu einem \_\_\_\_\_ (1) ausgedehnt und ist vor kurzem in einer \_\_\_\_\_ (2) explodiert. Wegen ihrer enormen Masse von 9,7 Sonnenmassen ist aus ihr ein \_\_\_\_\_ (3) Schwarzes Loch geworden. Die \_\_\_\_\_ (4) der ALMA-Antennen bestätigt, dass dort nun Materie so schnell beschleunigt wird, dass sie Strahlung emittiert. Du fliegst mit einem Raumschiff hin und siehst es dir an.

Als du ankommst siehst du allerdings nicht viel. Bloß den kleinen dunklen Fleck, an dessen Rand das Licht der dahinterliegenden Sterne wegen des \_\_\_\_\_ (5) gekrümmt wird. Da fällt dir ein warum dieser Fleck so dunkel ist, denn schließlich kann Licht dem \_\_\_\_\_ (6) eines Schwarzen Lochs nicht entkommen. Das Raumschiff hältst du in einiger Entfernung an und machst einen Weltraumspaziergang dort hin. Bevor du aussteigst vergleichst du noch die Uhrzeit mit deinem Copiloten, damit später durch die \_\_\_\_\_ (7) festgestellt werden kann, wie stark das Gravitationsfeld ist.

Als du dich dem Ereignishorizont des Schwarzen Lochs näherst, scheinst du für deinen Copiloten schon fast still zu stehen. Dieses Stillstehen nimmt aber nur er wahr, für dich vergeht die Zeit normal weiter. Sie ist schließlich \_\_\_\_\_ (8). Zudem wirkst du aufgrund der \_\_\_\_\_ (9) seltsam verformt. Du überschreitest den Ereignishorizont, obwohl dir klar ist, dass der Antrieb dich nicht auf die \_\_\_\_\_ (10) für eine Rückreise bringen kann und du folglich dem Schwarzen Loch niemals mehr entkommen kannst.

Du fliegen also hinein und ...

(Aber hier kann die aktuelle Forschung keine Veranschaulichung mehr liefern. Wir dürfen also gespannt sein, welche Erkenntnisse zu Schwarzen Löchern noch gefunden werden.)

### 3 Zusammenfassung wichtiger Sätze und Formeln

#### Überblick wichtiger Konstanten:

Lichtgeschwindigkeit:  $c = 299.792.458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Gravitationskonstante:  $G = 6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

Sonnenmasse:  $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Astronomical Unit:  $\text{AU} = 149.597.870.691 \text{ m} \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km}$   
(Mittlere Entfernung der Erde zur Sonne)

Lichtjahr:  $1 \text{ Lj} = 9.460.730.472.580,8 \text{ km} \approx 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km}$   
(Strecke, die Licht in einem Jahr zurücklegt)

Lichtstunde:  $1 \text{ Lh} = 1.079.252.848,8 \text{ km} \approx 1,1 \cdot 10^9 \text{ km}$   
(Strecke, die Licht in einer Stunde zurücklegt)

#### **Wie schnell muss man sein um von einem Planeten wegzufiegen?**

Um der Gravitation eines Himmelskörpers zu entkommen, benötigt ein Objekt eine entsprechend große Geschwindigkeit. Die kinetische Energie muss mindestens so groß sein wie die potentielle, die aus der Anziehungskraft bestimmt wird.

Aus  $E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}$  folgt die Fluchtgeschwindigkeit  $v_{\text{Fl}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

Um die Erde zu verlassen benötigt man beispielsweise mindestens 40.320 km/h.

#### **Wenn selbst das Licht nicht mehr fliehen kann – Der Ereignishorizont**

Der Schwarzschildradius bestimmt die Größe eines Himmelskörpers, ab der seine Gravitation nicht einmal mehr Licht entkommen lässt. Die Fluchtgeschwindigkeit ist also gleich der Lichtgeschwindigkeit.

Daraus folgt für den Radius:  $r_{\text{S}} = \frac{2GM}{c^2}$

Da nichts schneller ist als das Licht, können keinerlei Informationen zum Bereich  $r \leq r_{\text{S}}$  erhalten werden, daher wird diese Grenze auch Ereignishorizont genannt.

### Wie groß und wie schwer sind Schwarze Löcher?

Schwarze Löcher werden nach ihrer Masse und dem dazugehörigen Schwarzschildradius klassifiziert. In der folgende Tabelle sind diese aufgeführt:

Klasse	Masse $M$	Radius $r_S$
Supermassiv	$\sim 10.000-10^{10} M_\odot$	$\sim 0,001 - 10 \text{ AU}$
Mittelschwer	$\sim 1.000 M_\odot$	$\sim 10^3 \text{ km}$
Stellar	$\sim 10 M_\odot$	$\sim 30 \text{ km}$
Primordial	bis zur Masse des Mondes	bis zu $\sim 0,1 \text{ mm}$

*Tabelle 2: Klassifizierungen Schwarzer Löcher nach ihrer Masse und ihrem Radius*

### Die Entstehung eines Schwarzen Lochs

Stellare Schwarze Löcher sind das Endstadium sehr großer Sterne. Die Entstehung der anderen Klassifizierungen ist weitestgehend unerforscht.

1. Wenn ein Hauptreihenstern eine Masse von  $m > 0,6 M_\odot$  hat, wird er nach dem H-Brennen zu einem roten Riesenstern. Wenn dies nicht der Fall ist, entwickelt er sich zu einem weißen Zwerg.
2. Wenn ein roter Riesenstern eine Masse von  $m > 1,44 M_\odot$  hat, explodiert er nach dem He-Brennen in einer Supernova. Wenn dies nicht der Fall ist, entwickelt er sich ebenfalls zu einem weißen Zwerg.
3. Wenn der übriggebliebene Kern nach der Supernova noch eine Masse von  $m > 3 M_\odot$  hat, entsteht ein Schwarzes Loch. Wenn dies nicht der Fall ist, entwickelt er sich zu einem Neutronenstern.

### Wachsen Schwarze Löcher? - Die Hawking-Strahlung

Schwarze Löcher müssen nicht zwangsweise immer mehr Masse in sich aufnehmen. Durch Teilchen-Antiteilchen-Paare (z.B. Elektron-Positron) können sie verkleinert werden, wenn das Antiteilchen in das Schwarze Loch fällt und das Teilchen entkommt.

Die wegfliegenden Teilchen ergeben die Hawking-Strahlung.

Durch diesen Effekt können Schwarze Löcher "sterben", was aber mehrere Milliarden Jahre dauert.

### Die Krümmung des Raums

Kapitel 2.1

Albert Einsteins Beschreibung der Gravitation: Massen krümmen den Raum.

Schwarze Löcher krümmen den Raum so sehr, dass in deren Zentrum (der Singularität) ein Loch entsteht.

Durch die geodätische Deviation werden Körper durch eine starke Gravitationsquelle verformt.

### Die Ablenkung des Lichts – Der Gravitationslinseneffekt

Kapitel 2.2

Licht wird durch große Massen (also besonders durch Schwarze Löcher) angezogen und somit die Ausbreitungsrichtung abgelenkt.

Der Winkel, um den Licht am Rand einer Masse abgelenkt wird, ist:  $\delta = \tan^{-1} \left( 4 \cdot \frac{GM}{Rc^2} \right)$

Bei der Sonne wirkt sich dies kaum aus. Würde ihre Masse aber zu einem Schwarzen Loch zusammen schrumpfen, so würde ein Lichtstrahl um  $63,43^\circ$  abgelenkt.

### Zeit ist relativ, besonders bei großen Massen

Kapitel 2.3

Die Veränderung der Zeit (Zeitdilatation) wird durch zwei Umstände hervorgerufen:

- Durch eine relative Bewegung zwischen Beobachtetem und Beobachter (was aber erst bemerkbar ist, wenn sie sich der Lichtgeschwindigkeit nähert).
- Durch unterschiedliche Entfernungen zu einem Gravitationszentrum.

Die gravitative Zeitdilatation ist abhängig von der Stärke des Gravitationsfeldes, was besonders bei Schwarzen Löchern sehr stark ist.

Berechne die fehlenden Daten in Tabelle 1 mit Hilfe von Formel 1:

Für die Fluchtgeschw. des Mondes verwenden wir einfach die Umrechnung von Stunden in Sekunden:

$$v_{\text{Fl, Mond}} = 8.280 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{8.280 \text{ km}}{3.600 \text{ s}} = 2,3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Die Fluchtgeschw. der Erde berechnen wir direkt durch Einsetzen:

$$v_{\text{Fl}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6.378 \cdot 10^3 \text{ m}}} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 40.320 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Zur Berechnung des Radius beim Jupiter stellen wir die Formel um:

$$v_{\text{Fl}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Leftrightarrow R = \frac{2GM}{v_{\text{Fl}}^2} = 71.357 \text{ km}$$

Bei der Masse der Sonne gehen wir analog vor und stellen um:

$$v_{\text{Fl}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Leftrightarrow M = \frac{v_{\text{Fl}}^2 R}{2G} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Damit ergibt sich die folgende vollständige Tabelle 1:

Himmelskörper	Masse $M$ in kg	Radius $R$ in km	$v_{\text{Fl}}$ in km/s	$v_{\text{Fl}}$ in km/h
Mond	$7,349 \cdot 10^{22}$	1.738	<b>2,3</b>	8.280
Mars	$6,419 \cdot 10^{23}$	3.396	5,0	18.000
Erde	$5,974 \cdot 10^{24}$	6.378	<b>11,2</b>	<b>40.320</b>
Jupiter	$1,899 \cdot 10^{27}$	<b>71.357</b>	59,6	214.560
Sonne	<b><math>1,989 \cdot 10^{30}</math></b>	696.704	617,3	2.222.280

Tabelle 1: Einige Himmelskörper und deren Fluchtgeschwindigkeiten  $v_{\text{Fl}}$ .

## Aufgabe 2

Wie klein müsste die Erde werden um bei gleichbleibender Masse ein Schwarzes Loch zu bilden? Wir setzen die Werte in die Formel für  $r_s$  ein:

$$r_{S, \text{Erde}} = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{\left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 8,86 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Sie müsste also auf lediglich 8,86 Millimeter schrumpfen.

$$r_{S, \text{Sonne}} = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{\left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 2,95 \cdot 10^3 \text{ m}$$

Bei knapp 3 Kilometern würde die Sonne ein Schwarzes Loch werden.

## Aufgabe 3

Wir setzen die jeweils größten Massen der Klassen in Formel 3 ein und berechnen:

$$\text{Stellar: } \rho = \frac{3 c^6}{32 \pi G^3 (10 \cdot M_\odot)^2} = 1,85 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Dies entspricht 185 Billionen Tonnen pro Kubikmeter.

$$\text{Mittelschwer: } \rho = \frac{3 c^6}{32 \pi G^3 (1000 \cdot M_\odot)^2} = 1,85 \cdot 10^{13} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Es sind immerhin noch 18,5 Milliarden Tonnen pro Kubikmeter.

$$\text{Supermassiv: } \rho = \frac{3 c^6}{32 \pi G^3 (10^{10} \cdot M_\odot)^2} = 1,85 \cdot 10^{-1} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Bei solch großen Schwarzen Löchern beträgt die Dichte nur 185 Gramm pro Kubikmeter.

$$\text{Sonne: } \rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{\frac{4}{3} \pi (696.704.000 \text{ m})^3} = 1,40 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Die Sonne hat also ca. 1400 Kilogramm pro Kubikmeter Dichte.

Zum Vergleich: Wasser hat 1000 Kilogramm pro Kubikmeter.

Es zeigt sich also, dass kleine Schwarze Löcher eine unvorstellbar hohe Dichte besitzen, wohingegen große Schwarze Löcher eine geringere Dichte als die Sonne haben.



Aufgabe 4

- a) Unsere Sonne wird irgendwann ihren gesamten Wasserstoffvorrat verbrannt haben und dann zu einem roten Riesenstern werden. Die Masse ist aber unterhalb der Grenze von  $m = 1,44$  Sonnenmassen und sie wird daher nicht in einer Supernova explodieren sondern zu einem weißen Zwerg werden. Ohne die Supernova kann sie zudem nicht zu einem stellaren Schwarzen Loch werden.
- b)  $8 M_{\odot} \cdot (1 - 0,06) \cdot (1 - 0,55) = 8 M_{\odot} \cdot 0,94 \cdot 0,45 = 3,384 M_{\odot}$   
 Da dies größer ist als die dreifache Sonnenmasse, ergibt der übriggebliebene Kern ein Schwarzes Loch.

Aufgabe 5

- a) Wir nutzen direkt Formel 4 um die Masse des Zentrums zu bestimmen und rechnen dabei alle Einheiten in die Basiseinheiten um:

$$M_{\text{Zentrum}} = \frac{v^2 \cdot r_{\text{Bahn}}}{G} = \frac{(20.000.000 \frac{\text{km}}{\text{h}})^2 \cdot 1,17 \text{ Lh}}{6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}} = \frac{(5.555.555,56 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 \cdot 1,26 \cdot 10^{12} \text{ m}}{6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}}$$

$$= 5,84 \cdot 10^{35} \text{ kg} \approx 293.626 M_{\odot}$$

Der Himmelskörper im Zentrum ist also etwa 300.000 mal so schwer wie unsere Sonne.

- b) Die Dichte der Sonne ist wie in Aufgabe 3 berechnet:

$$\text{Sonne: } \rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{\frac{4}{3} \pi (696.704.000 \text{ m})^3} = 1,40 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Wir stellen Formel 3 nach  $r$  um und setzen ein:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi r^3} \leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{M}{\frac{4}{3} \pi \rho}} = \sqrt[3]{\frac{5,83 \cdot 10^{35} \text{ kg}}{\frac{4}{3} \pi \cdot 1,40 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} = 4,63 \cdot 10^{10} \text{ m} \approx 42,1 \text{ Lh}$$

- c) Das unbekannte Zentrum wird also höchstwahrscheinlich kein Stern sein, da der Radius eines Sterns mit dieser Masse sehr viel höher wäre als die untersuchte Kreisbahn. Der umkreisende Stern würde also innerhalb des zentralen Sterns fliegen.  
 Das Objekt kann ebenfalls kein Roter Riese sein, da dieser gegenüber einem Hauptreihenstern mit derselben Masse sogar noch vergrößert ist.  
 Desweiteren kann es kein weißer Zwerg oder Neutronenstern sein, da diese nicht so eine hohe Masse haben können.  
 Es muss also ein Schwarzes Loch sein. Der Schwarzschildradius beträgt  $r_S = 8,66 \cdot 10^8 \text{ m}$ .

Wir benutzen die Vereinfachung und setzen für  $t$  eine Sekunde ein. Dadurch rechnen wir mit:

$$s = \frac{GM}{2R^2}$$

Um die Verlängerung deines Körpers zu erhalten, müssen wir die Differenz  $\Delta s$  der zurückgelegten Strecke für deine Füße und für deinen Kopf betrachten. Also:

$$\Delta s = s_{\text{Füße}} - s_{\text{Kopf}} = \frac{GM}{2R^2} - \frac{GM}{2(R+\text{Körpergröße})^2} = \frac{GM}{2} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+\text{Körpergröße})^2} \right)$$

a) Nach Tabelle 1 entspricht  $R$  hier dem Radius der Erde addiert mit der Höhe über ihr und  $M$  der Masse der Erde, also:

$$R = R_{\text{Erde}} + \text{Höhe} = 6.378 \text{ km} + 2 \text{ km} = 6.380 \text{ km}, M = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Nehmen wir an du bist 1,80 m groß. Dann ergibt sich hier folgende Verlängerung:

$$\begin{aligned} \Delta s &= \frac{6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{2} \left( \frac{1}{(6.380.000 \text{ m})^2} - \frac{1}{(6.380.001,80 \text{ m})^2} \right) \\ &= 2,76 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Du wirst also um 2,76 Mikrometer länger.

b) Bei der Sonne rechnen wir mit:

$$R = R_{\text{Sonne}} + \text{Höhe} = 696.704 \text{ km} + 2 \text{ km} = 696.706 \text{ km}, M = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} \Delta s &= \frac{6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{2} \left( \frac{1}{(696.704.000 \text{ m})^2} - \frac{1}{(696.704.001,80 \text{ m})^2} \right) \\ &= 7,06 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Durch den größeren Abstand wirst du hier nur 0,7 Mikrometer länger.

c) Beim Schwarzen Loch rechnen wir schließlich mit:

$$R = 6.380 \text{ km}, M = 10 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 19,89 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} \Delta s &= \frac{6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 19,89 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{2} \left( \frac{1}{(6.380.000 \text{ m})^2} - \frac{1}{(6.380.001,80 \text{ m})^2} \right) \\ &= 9,20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Der Abstand  $R$  war der gleiche wie bei der Erde. Durch die enorme Gravitation hat sich dein Körper aber in einer Sekunde um 9,20 m verlängert.

## Aufgabe 7

Die Geschwindigkeit des Lichts ist  $v = c$ . In  $x$ -Richtung ergibt sich dadurch:  $\frac{x}{c} = t$

Die Beschleunigung in  $y$ -Richtung entspricht der Schwerebeschleunigung:  $a = g = G \frac{M}{R^2}$

Setzen wir nun  $t$  und  $a$  ein erhalten wir die Parabelgleichung:

$$y = \frac{1}{2} \left( G \frac{M}{R^2} \right) \cdot \left( \frac{x}{c} \right)^2 = \frac{GM}{2R^2} \cdot \frac{x^2}{c^2} = \frac{GM}{2R^2 c^2} \cdot x^2$$

## Aufgabe 8

a) Wir setzen in Formel 6 die Daten unserer Sonne aus der vollständigen Tabelle 1 ein:

$$\delta = \tan^{-1} \left( 4 \cdot \frac{GM}{Rc^2} \right) = \tan^{-1} \left( 4 \cdot \frac{6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{696.704 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \left( 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2} \right)$$

$$\delta = \tan^{-1}(8,47 \cdot 10^{-6}) = 0,000485^\circ$$

Die Ablenkung von Lichtstrahlen durch die Gravitation der Sonne ist also sehr gering.

b) Betrachten wir nun den Fall, dass die Sonne zu einem Schwarzen Loch wurde:

$$\delta = \tan^{-1} \left( 4 \cdot \frac{6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{2,95 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \left( 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2} \right) = 63,43^\circ$$

Die Ablenkung der Lichtstrahlen ist dann sehr viel größer!

a) Ist die Geschwindigkeit  $v = 0$ , so ergibt sich:

$$\frac{f-f_0}{f_0} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = - \frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Stillstehende Teilchen erfahren also nur die gravitative Rotverschiebung. Damit bestätigt die Formel die Annahme, dass die relativistische Zeitdilatation nur für bewegte Objekte gilt.

b) Für fliegende Teilchen, die sich stets im gleichen Gravitationspotential befinden ( $r = r_0$ ), ergibt sich:

$$\frac{f-f_0}{f_0} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{GM}{c^2} (0) = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

Damit ist auch der umgekehrte Fall zur Lösung von a) gezeigt. Auf fliegende Teilchen, die keine Änderung der gravitativen Einwirkungen erfahren, wirkt sich nur die relativistische Zeitdilatation auf die Rotverschiebung aus.

c) Für ein wegfliegendes Teilchen betrachten wir Formel 7 für  $r \rightarrow \infty$ :

$$\frac{f-f_0}{f_0} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{r \rightarrow \infty} - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{GM}{c^2} \left( 0 - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{GM}{c^2 r_0}$$

Für  $r \rightarrow \infty$  geht  $\frac{1}{r}$  gegen 0. Somit verbleiben bei einer gleichbleibenden Geschwindigkeit  $v$  nur Konstanten. Die Rotverschiebung geht also gegen einen konstanten Wert, der durch die Anfangsgeschwindigkeit  $v$  und den Anfangsabstand  $r_0$  des Teilchens bestimmt ist.

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| (1) roten Riesenstern         | (6) Schwarzschildradius/Ereignishorizont |
| (2) Supernova                 | (7) Zeitdilatation                       |
| (3) stellares                 | (8) relativ                              |
| (4) Röntgenaufnahme           | (9) geodätischen Deviation               |
| (5) Gravitationslinseneffekts | (10) Fluchtgeschwindigkeit               |